# Bewijs: Bissectrice van twee snijdende rechten

Bert De Deckere

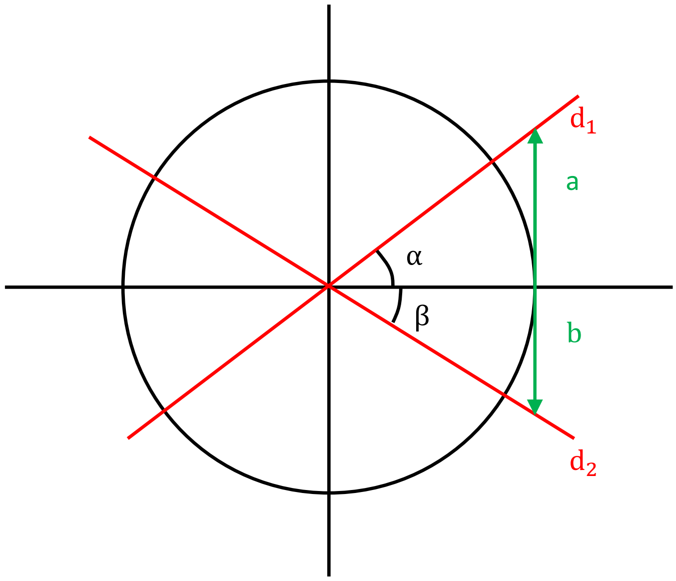
13 mei 2010

## Bewijs

### Algemene beschouwing

In dit document zal er aangetoond worden hoe de bissectrice van twee snijdende rechten analytisch bepaald kan worden. We onderzoeken (en bewijzen) hierbij ook een bijzonder geval waarbij de hoek tussen de twee rechten gelijk is aan 90°.

## Formule opstellen




Gegeven:

Rechten $d_1$ en $d_2$ met rico's a en b.
α = hoek van $d_1$ met positieve x-as.
β = hoek van $d_2$ met positieve x-as.
Waarbij $\alpha, \beta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Om met de gegevens van bovenstaande figuur de bissectrice te bepalen tussen $x_1$ en $x_2$ gaan we als volgt te werk:

$$\text{richtingscoëfficiënt} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\text{tangens } \alpha = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Met behulp van de tangens kunnen we dus de richtingscoëfficiënt berekenen en bijgevolg ook de hoeken α en β.

$$\alpha = \text{Bgtan}\ (a)$$

$$\beta = \text{Bgtan}\ (b)$$

De vergelijking van een rechte: f(x) = mx + q
Om de richtingscoëfficiënt m te bepalen kijken we eens naar onderstaande tabel:

| $\alpha$ | $\beta$ | bissectrice |
|---|---|---|
| 0° | -90° | -45° |
| 30° | -60° | -15° |
| 60° | -30° | 15° |
| 90° | 0° | 45° |
| 40° | 20° | 30° |

We merken dat de hoek die de bissectrice maakt met de x-as gelijk is aan: $\frac{\alpha+\beta}{2}$ .

Dit is overigens logisch indien we weten dat een bissectrice de hoek in twee gelijke hoeken verdeelt.

Om hieruit terug de richtingscoëfficiënt te berekenen nemen we de tangens van de bekomen waarde. Deze gegevens samen geven ons de volgende formule:

$$f(x) = \tan\left(\frac{\mathrm{Bgtan}(a) + \mathrm{Bgtan}(b)}{2}\right) x$$

Merk echter op dat deze formule ervan uitgaat dat de rechten elkaar snijden in de oorsprong. Indien dit niet het geval is moet onderstaande formule toegepast worden:

$$f(x) = \tan\left(\frac{\mathrm{Bgtan}(a) + \mathrm{Bgtan}(b)}{2}\right)(x - x_1) + y_1$$

waarbij $x_1$ en $y_1$ respectievelijk de x- en y-waarde voorstellen van het snijpunt van beide rechten $d_1$ en $d_2$.

# Bissectrice van snijdende rechten onder een hoek van 90°

In dit onderwerp zullen we de speciale eigenschappen onderzoeken van rechten die elkaar snijden onder een hoek van 90°.
Indien dit het geval is geldt er dat de richtingscoëfficiënt b omgekeerd en tegengesteld is aan a. Er geldt dus:

$$\mathrm{b} = -\frac{1}{\mathrm{a}}$$

Dit heeft enkele interessante gevolgen die we hieronder bekijken:

| $\mathrm{a}$ | $\mathrm{b}$ | rico bissectrice |
|---|---|---|
| 1 | $-\frac{1}{1}$ | 0 |
| 2 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ |
| 3 | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{4}$ |
| 4 | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{5}$ |
| 5 | $-\frac{1}{5}$ | $\frac{4}{6}$ |
| -5 | $\frac{1}{5}$ | $-\frac{4}{6}$ |

Hieruit kunnen we concluderen dat de richtingscoëfficiënt van een bissectrice van twee rechten die elkaar onder een hoek van 90° snijden gelijk is aan:

$$\text{rico bissectrice } = \frac{\mathrm{a}-1}{\mathrm{a}+1}$$

waarbij a > 0. Om de juistheid van deze conclusie bij iedere waarde van a na te gaan moeten we deze stelling echter bewijzen. Het bewijs hiervan is op volgende pagina te vinden.

$$\text{rico bissectrice} = \tan\left(\frac{\mathrm{Bgtan}(a) + \mathrm{Bgtan}\left(-\frac{1}{a}\right)}{2}\right)$$ formule bissectrice

$$= \tan\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$ $\alpha = \mathrm{Bgtan}(a)$
$-\beta = \mathrm{Bgtan}\left(-\frac{1}{a}\right)$

$$= \tan\left(\frac{2\alpha - 90°}{2}\right)$$ $\alpha - \beta = 90°$
$\beta = \alpha - 90°$

$$= \tan(\alpha - 45°)$$ breuk uitwerken

$$= \frac{\tan\alpha - \tan 45°}{\tan\alpha \tan 45° + 1}$$ verschilformule toepassen

$$= \frac{\tan\alpha - 1}{\tan\alpha + 1}$$ $\tan 45 = 1$

$$= \frac{a - 1}{a + 1}$$ $\tan\alpha = a$

Q.E.D.

controle: als $a = 3$ en $b = -\frac{1}{3}$ dan is de rico van de bissectrice $= \frac{1}{2}$

Merk echter op dat we ervan uit zijn gegaan dat a > b. Het bewijs voor a < b is op volgende pagina te vinden, het komt erop neer dat deze keer gewoon de plaats van a en b verwisseld worden.

$$\text{rico bissectrice} = \tan\left(\frac{\text{Bgtan}\,a + \text{Bgtan}\left(-\frac{1}{a}\right)}{2}\right)$$ formule bissectrice

$$= \tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$ $\alpha = \text{Bgtan}(a)$
$\beta = \text{Bgtan}\left(-\frac{1}{a}\right)$

$$= \tan\left(\frac{2\alpha + 90°}{2}\right)$$ $-\alpha + \beta = 90°$
$\beta = \alpha + 90°$

$$= \tan(\alpha + 45°)$$ breuk uitwerken

$$= \frac{\tan 45° + \tan\alpha}{1 - \tan 45° \tan\alpha}$$ verschilformule toepassen

$$= \frac{1 + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha}$$ $\tan 45° = 1$

$$= \frac{1 + a}{1 - a}$$ $\tan\alpha = a$

Q.E.D.

controle: als $a = -\frac{1}{3}$ en $b = 3$ dan is de rico van de bissectrice $= \frac{1}{2}$

We verkregen in bovenstaande bewijzen twee formules die de richtingscoëfficiënt beschrijven van de bissectrice, voor enerzijds positieve en negatieve waarden van a:

$$\text{formule als a} > 0\text{: rico bissectrice} = \frac{a-1}{a+1}$$

$$\text{formule als a} < 0\text{: rico bissectrice} = \frac{a+1}{1-a}$$

Merk op dat twee snijdende rechten twee bissectrices hebben die onderling een hoek maken van 90°, dus geldt:

$$\text{als a } > 0, \textit{dan geldt}: l_1 = \frac{a-1}{a+1}$$

$$l_2 = -\frac{1}{\frac{a-1}{a+1}} = -\frac{a+1}{a-1} = \frac{a+1}{1-a}$$

$$\text{als a} < 0, \textit{dan geldt}: l_1 = \frac{a+1}{1-a}$$

$$l_2 = -\frac{1}{\frac{a+1}{1-a}} = -\frac{1-a}{a+1} = \frac{a-1}{a+1}$$

Dit is hetzelfde resultaat dat we eerder bekwamen.

<u>Besluit:</u>

gegeven: rechte $d_1$ met rico a

rechte $d_2$ met rico $-\frac{1}{a}$

dan: rico $l_1 = \frac{a+1}{1-a}$ en rico $l_2 = \frac{a-1}{a+1}$

met $l_1$ en $l_2$ bissectrices van $d_1$ en $d_2$